

Muñeco articulado que camina

J Güémez

Departamento de Física Aplicada,
Universidad de Cantabria

Noviembre 5, 2013

Los juguetes articulados, con formas de robot caminante, chimpance andador, canguro saltarín, etc., tienen una física interesante, que puede ser discutida tanto en las aulas de bachillerato como en las de universidad [1].

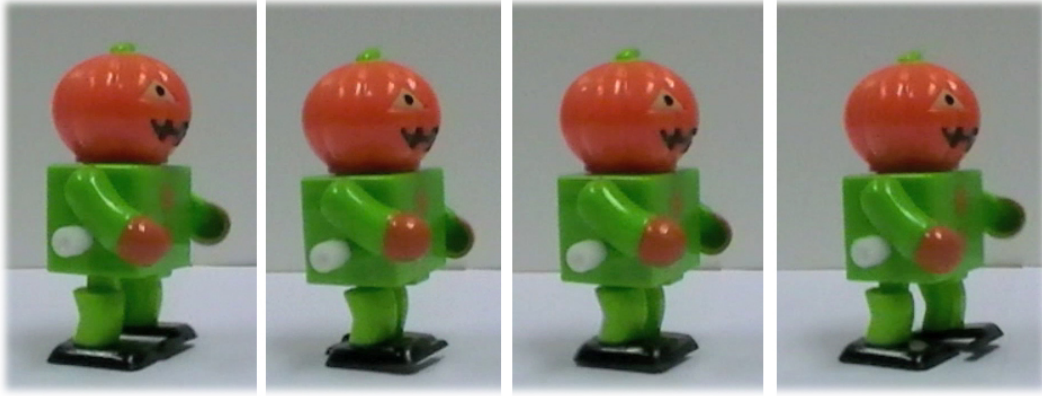


Figura 1: Un muñeco articulado, accionado por un resorte al que se da cuerda girando el pequeño cilindro blanco lateral, avanza dando pasos. Cuando un pie avanza por el aire, el otro permanece en reposo respecto del suelo.

En la Fig. 1 se muestran varios fotogramas del desplazamiento de uno de estos juguetes articulados. Para que el juguete se ponga en movimiento, es necesario comprimir un resorte (darle cuerda). Admitiendo que para el resorte interno, de forma espiral, del juguete se cumple la ley de Hooke $\tau = \kappa\theta$ (τ es el torque aplicado sobre el pequeño cilindro blanco unido al resorte, θ el ángulo que gira y κ la constante elástica del resorte), entonces, el trabajo realizado sobre el sistema es $W = \frac{1}{2}\kappa\theta_1^2$, donde θ_1^2 es el ángulo inicial del resorte con el que el muñeco comienza su andadura. Por el primer principio de la termodinámica aplicado a esta compresión del resorte, $\Delta U = W$ (con $Q = 0$), se tiene que el trabajo realizado se almacena como energía interna (potencial elástica) con

$$\Delta U_R = \frac{1}{2}\kappa\theta_1^2. \quad (1)$$

El muñeco comienza su camino con una energía interna (macroscópica) acumulada en forma de energía elástica del resorte, energía que se irá liberando en cada paso hasta

agotarse. Esta energía mecánica elástica se obtiene a partir de la energía libre liberada en los músculos de la persona que dando cuerda comprime el resorte. Considerando como sistema termodinámico el conjunto persona más muñeco, se tiene que en este caso hay dos formas de energía interna: la energía interna del resorte U_R , que aumenta $\Delta U_R > 0$ cuando se le da cuerda, y la de la energía interna química de la persona que lo comprime, U_ξ , que disminuye $\Delta U_\xi < 0$ en este proceso; una forma de trabajo de configuración contra las fuerzas externas $-P\Delta V_\xi$, y un intercambio de calor, $T\Delta S_\xi$ (que garantice que la entropía del universo no disminuya durante las reacciones químicas), que, de acuerdo con la Ec. (1) implica que [2]

$$\frac{1}{2}\kappa\theta_1^2 = -\Delta G_\xi. \quad (2)$$

La energía mecánica acumulada en el resorte proviene de la disminución de la función de Gibbs que tiene lugar en los músculos de la persona que comprime dicho resorte [3].

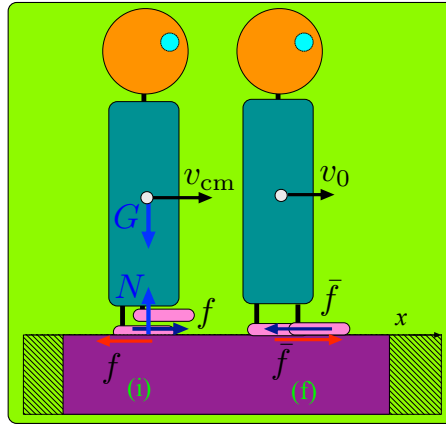


Figura 2: Esquema de las fuerzas que actúan sobre el muñeco que camina con velocidad promedio v_0 constante. (i) Fuerza del peso G , fuerza normal N y la fuerza del suelo sobre su pie f . El punto de apoyo del pie no se desplaza. El pie ejerce una fuerza igual y de sentido contrario sobre el suelo, que no se mueve. El caminante acelera. (f) Cuando el pie se apoya de nuevo en el suelo, una fuerza $\bar{f}$ en sentido contrario a la anterior decelera al caminante, volviendo a su velocidad inicial v_0 .

Considérese ahora el movimiento del muñeco. En la Fig. 2 se muestra un esquema de las fuerzas que actúan sobre los pies del muñeco en un paso. Al igual que sucede en el caso de una persona que camina [4], cuando un pie avanza, el otro permanece en reposo respecto del suelo.

Durante el intervalo de tiempo t_0 que el pie levantado permanece en movimiento, el centro de masas del cuerpo acelera (Fig. 3). Sobre el cuerpo actúa una fuerza (las fuerzas no se notan como vectores) f (que debe ser menor de μG , donde μ es el coeficiente estático de rozamiento entre el pie y el suelo y $G = Mg$ es el peso; en ausencia de rozamiento no se podría avanzar), tal que

$$ft_0 = M(v_{f,cm} - v_{i,cm}),$$

donde $v_{f,cm}$ es la velocidad que adquiere su centro de masas justo antes de que el pie levantado vuelva a tocar el suelo y $v_{i,cm} \approx v_0$ es la velocidad antes del paso, aproximadamente

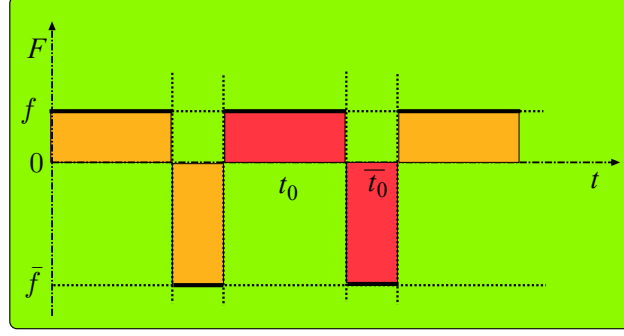


Figura 3: *Esquema de las fuerzas que actúan sobre el muñeco que camina.* Durante el intervalo de tiempo t_0 se aplica la fuerza horizontal f , positiva, y durante el intervalo de tiempo $\bar{t}_0$ se aplica la fuerza negativa $\bar{f}$. En cada paso, el impulso total neto es cero, con $ft_0 = |\bar{f}\bar{t}_0|$, y el muñeco avanza con velocidad cuasi-constante.

la velocidad media del muñeco (haciendo $G = -N$, no se considera la ligera elevación, y posterior descenso, del centro de masas del muñeco). A partir de esta ecuación se tiene la ecuación del centro-de-masas [2, p. 361]

$$fL_{\text{cm}} = \frac{1}{2}M \left(v_{f,\text{cm}}^2 - v_{i,\text{cm}}^2 \right), \quad (3)$$

siendo L_{cm} la distancia que recorre su centro-de-masas durante un paso. La Ec. (3) es la ecuación del pseudo-trabajo [5, 6], pues la fuerza f aplicada sobre el pie inmóvil no realiza trabajo. Para entender el proceso de aumento de la energía mecánica que tiene lugar en esta parte del paso, hay que recurrir al primer principio de la termodinámica en su forma más general [7] $\Delta K_{\text{cm}} + \Delta U = W_{\text{ext}} + Q$. Puesto que $W_{\text{ext}} = 0$ y se puede admitir que $Q = 0$, se tiene que

$$\frac{1}{2}M \left(v_{f,\text{cm}}^2 - v_{i,\text{cm}}^2 \right) + \frac{1}{2}\kappa \left(\theta_f^2 - \theta_i^2 \right) = 0.$$

Con $\theta_f < \theta_i$ (el resorte se va desenrollando), se tiene que el origen de la variación (aumento) de la energía cinética del muñeco hay que buscarlo en la energía interna del mismo acumulada en forma de energía elástica del resorte.

Como en este proceso no se disipa energía mecánica, el incremento de entropía del universo es nulo $\Delta S_{\text{U}} = 0$, el proceso es reversible y el incremento de energía cinética conseguido se puede transformar (en principio) en cualquier otra forma de energía mecánica.

Cuando el pie en movimiento vuelve a apoyarse en el suelo, sobre el sistema se aplica una fuerza (negativa) $\bar{f}$, durante un intervalo de tiempo $\bar{t}_0$, que desacelera el muñeco (Fig. 3). Las ecuaciones mecánicas son ahora

$$\begin{aligned} -\bar{f}\bar{t}_0 &= M(v_{i,\text{cm}} - v_{f,\text{cm}}), \\ -\bar{f}\bar{L}_{\text{cm}} &= \frac{1}{2}M(v_{i,\text{cm}}^2 - v_{f,\text{cm}}^2). \end{aligned}$$

Cuando el muñeco avanza a velocidad (promedio) constante v_0 (Fig. 4), el impulso de la aceleración y el de frenado deben ser iguales (Fig. 3) [8] $ft_0 = |\bar{f}\bar{t}_0|$, aunque el

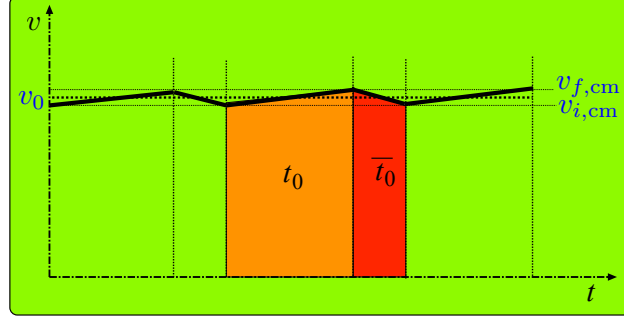


Figura 4: *Variación de la velocidad en el muñeco que camina.* Durante el intervalo de tiempo t_0 la velocidad aumenta linealmente desde $v_i \equiv v_{i,cm}$ hasta $v_f \equiv v_{f,cm}$, y durante el intervalo de tiempo $\bar{t}_0$ la velocidad varía desde $v_{f,cm}$ hasta $v_{i,cm}$. La velocidad promedio (aproximadamente) constante es v_0 .

desplazamiento del centro de masas en cada fase del mismo paso es diferente, con $L_{cm} > \bar{L}_{cm}$.

La ecuación del primer principio de la termodinámica para esta parte del proceso (el intervalo $\bar{t}_0$ es tan corto que se puede considerar que el resorte no se desenrolla) es

$$\frac{1}{2}M(v_{i,cm}^2 - v_{f,cm}^2) = Q.$$

Con $v_{i,cm} < v_{f,cm}$, se tiene que $Q < 0$, una energía cedida por calor al entorno que da lugar a un incremento de entropía del universo de

$$\Delta S_u = -\frac{Q}{T} > 0,$$

lo que indica que esta parte del proceso es irreversible y que la energía mecánica

$$\Delta U_r = \frac{1}{2}\kappa(\theta_f^2 - \theta_i^2),$$

($\theta_f < \theta_i$) no puede ser recuperada [9]. Para el proceso completo, desde que el muñeco comienza su andadura hasta que se detiene, considerando la Ec. (2), se tiene que

$$\Delta G_\xi = -\frac{1}{2}\kappa\theta_1^2 = -kQ,$$

siendo k el número de pasos dados por el muñeco antes de pararse, y con incremento de la entropía del universo

$$\Delta S_U = -\frac{\Delta G_\xi}{T}.$$

Las leyes de Newton proporcionan información interesante, por supuesto, correcta, sobre el movimiento del centro-de-masas del muñeco y las fuerzas que el suelo ejerce sobre el pie del caminante que lo provocan, pero es necesario recurrir al primer principio de la termodinámica, en su forma más general, para entender las transformaciones de energía que

tienen lugar tanto durante un paso como durante el proceso completo, incluyendo el papel de la persona que da cuerda al muñeco, como al segundo principio de la termodinámica, para caracterizar aquellas partes del paso que son reversibles y aquellas otras que son irreversibles.

Agradecimientos

Agradezco al Prof. Manuel Fiolhais sus interesantes consideraciones relativas a la física de estos muñecos articulados que caminan.

Referencias

- [1] J Güémez, M Fiolhais, *The physics of a walking robot*, Phys. Educ. **48** 455-458 (2013)
- [2] R W Chabay and B A Sherwood, *Matter and Interactions*, 3th ed. Wiley and Sons, Hoboken 2011. p. 308
- [3] P Atkins, *The Laws of Thermodynamics. A very Short Introduction*, Oxford U. Press, Oxford UK 2010, pp. 65-72
- [4] N Messenger, *Moving the human machine: understanding the mechanical characteristics of normal human walking*, Phys. Educ. **29** 352-357 (1994)
- [5] C M Penchina, *Pseudowork-energy principle*, Am. J. Phys. **46**, 295-296 (1978)
- [6] B A Sherwood, *Pseudowork and real work*, Am. J. Phys. **51**, 597-602 (1983)
- [7] C Fernández Pineda, S Velasco Maillo, *Introducción a la Termodinámica*, Ed. Síntesis, Madrid 2009. pp. 101-102.
- [8] O A Haugland, *Walking through the impulse-momentum theorem*, Phys. Teach. **51** 78-79 (2013). R Cross, *Standing, walking, running, and jumping on a force plate*, Am. J. Phys. **67**, 304-309 (1999)
- [9] J Güémez, M Fiolhais, *From mechanics to thermodynamics: analysis of selected examples*, Eur. J. Phys. **34** 345-357 (2013)