

Fuerzas que no realizan trabajo

J Güémez

*Departamento de Física Aplicada,
Universidad de Cantabria*

Octubre 23, 2013

En la Fig. 1 se muestra un esquema de un proceso en el que un cubo de material blando (arcilla, masilla [1] o plastilina), choca contra el suelo [2] en un choque completamente inelástico. Sólo se está interesado en la parte del movimiento que tiene lugar desde el contacto inicial del cubo con el suelo hasta que aquel se detiene por completo.

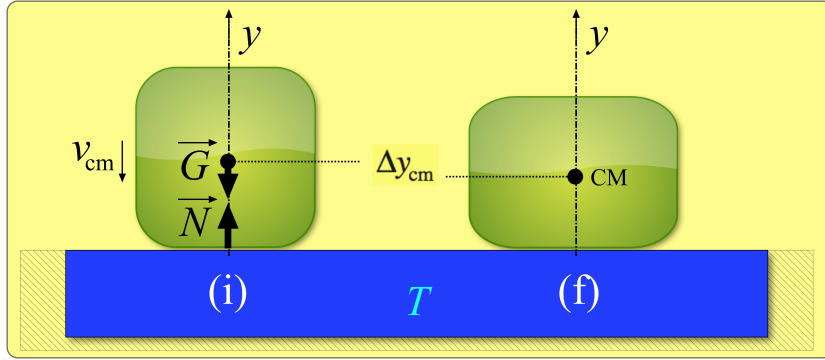


Figura 1: Impacto completamente inelástico de un cubo blando contra el suelo (i) – contacto inicial; (f) el cubo está detenido. La velocidad inicial del (centro-de-masas del) cubo es v_{cm} y su centro-de-masas desciende una altura Δy_{cm} durante el proceso.

Puesto que el cubo es un cuerpo extenso, para comenzar a describir el proceso se aplica la segunda ley de Newton en su forma de ‘ecuación (vectorial) impulso-variación del momento lineal’ del centro-de-masas

$$\left(\sum_j \vec{F}_j \right) dt = M d\vec{v}_{cm}, \quad (1)$$

en forma infinitesimal. La suma $\sum_j \vec{F}_j = \vec{\mathcal{F}}$ en la segunda ley de Newton se refiere a la resultante $\vec{\mathcal{F}}$ de las j fuerzas – conservativas y no conservativas – aplicadas sobre el cubo, dt es el intervalo infinitesimal de tiempo durante el que se aplican dichas fuerzas (las fuerzas siempre se aplican simultáneamente), M es la masa del cubo y $\vec{v}_{cm}$ se refiere a la velocidad de su centro-de-masas. Multiplicando cada término de la Ec. (1) por la velocidad del centro-de-masas v_{cm} , $\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{v}_{cm} dt = M \vec{v}_{cm} \cdot d\vec{v}_{cm}$, con (toda la descripción va

a ser unidimensional en vertical) $\vec{v}_{\text{cm}} dt = d\vec{y}_{\text{cm}}$ y con $\vec{v}_{\text{cm}} \cdot d\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{2} dv_{\text{cm}}^2$, se obtiene la ecuación diferencial

$$\vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{y}_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M dv_{\text{cm}}^2. \quad (2)$$

La Ec. (2) se refiere al desplazamiento del centro-de-masas del cubo, por lo que se denomina (en la literatura pedagógica anglosajona) ‘ecuación del centro-de-masas’ [3]. En un proceso finito en el que se aplica una fuerza resultante $\vec{\mathcal{F}}$, el centro-de-masas del cuerpo se desplaza en $\Delta\vec{y}_{\text{cm}}$ y la velocidad del centro-de-masas del cuerpo varía desde $v_{i,\text{cm}}$ hasta $v_{f,\text{cm}}$, se tiene que

$$\vec{\mathcal{F}} \cdot \Delta\vec{y}_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M (v_{f,\text{cm}}^2 - v_{i,\text{cm}}^2). \quad (3)$$

Así, el producto escalar de la resultante de las fuerzas aplicadas por el desplazamiento del centro-de-masas $\vec{\mathcal{F}} \cdot \Delta\vec{y}_{\text{cm}}$ permite obtener la variación ΔK_{cm} de la energía cinética del centro-de-masas. Esta Ec. (3) también se conoce como ‘ecuación del pseudo-trabajo’ [4], pues el producto $\vec{\mathcal{F}} \cdot \Delta\vec{y}_{\text{cm}}$ *no es, en general, un trabajo*, aunque tenga unidades de energía, siendo, en general, el producto de una fuerza resultante – que puede incluir fuerzas conservativas y no conservativas – por un desplazamiento que no es, en general, el de dicha fuerza resultante. En la literatura pedagógica en castellano esta Ec. (3) no suele escribirse explícitamente así, y se suele obtener eliminando el tiempo entre las ecuaciones cinemáticas de la velocidad y del desplazamiento, ambas en función de la aceleración, por lo que no recibe ningún nombre específico.

Sobre el cubo que choca contra el suelo, proceso que se describe en el referencial en el que el suelo permanece en reposo, se aplican dos fuerzas: el peso, $\vec{G} = (0, -Mg, 0)$, y la fuerza normal, $\vec{N} = (0, \bar{N}, 0)$, ejercida por el suelo, una fuerza tomada como promedio que, por simplicidad, se supone constante. Se denota por Δy_{cm} el desplazamiento vertical del centro-de-masas del cubo y por $[0, t_0]$ el intervalo de tiempo que transcurre desde el contacto inicial del cubo con el suelo hasta que aquel se detiene por completo. Para este proceso, la Ec. (3) conduce a la expresión $\Delta K_{\text{cm}} = (\vec{G} + \vec{N}) \cdot \Delta\vec{y}_{\text{cm}}$. Los desplazamientos asociados a estas dos fuerzas y al centro-de-masas son $\Delta\vec{y}_G = \Delta\vec{y}_{\text{cm}} = (0, -\Delta y_{\text{cm}}, 0)$ y $\Delta\vec{y}_N = (0, 0, 0)$, – el desplazamiento de la fuerza normal es cero [5] – respectivamente. Denotando como $v_{i,\text{cm}} = -v_{\text{cm}}$ a la velocidad inicial del centro-de-masas, cuando el cubo toca el suelo, con $v_{f,\text{cm}} = 0$, se obtienen la ecuación impulso-momento lineal y la ecuación del centro-de-masas

$$M v_{\text{cm}} = (\bar{N} - Mg) t_0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 = (\bar{N} - Mg) \Delta y_{\text{cm}}. \quad (5)$$

Estas ecuaciones son equivalentes y proporcionan la misma información de forma diferente. Si se coloca un punto de luz en el centro-de-masas del cubo y el proceso se observa en la oscuridad – por ejemplo, con reglas y relojes fosforescentes – se verá un punto que durante el intervalo de tiempo $[0, t_0]$ va disminuyendo su velocidad hasta detenerse por completo. Si se ha medido el tiempo t_0 , con la velocidad v_{cm} conocida, a partir de la Ec. (4) se podrá determinar el valor (promedio) de la fuerza $\vec{N}$ y a partir de la Ec. (5) el valor de Δy_{cm} (valor que se puede contrastar experimentalmente).

La interpretación de la Ec. (5) se suele hacer (en algunos libros de texto [6]) en los siguientes términos. El producto de la fuerza resultante $\vec{F} = \vec{N} - Mg$ por el desplazamiento del centro-de-masas del cubo Δy_{cm} se dice que constituye un ‘trabajo’ (negativo) realizado por la fuerza resultante y que ese ‘trabajo’ sería el causante de la variación (disminución) de las energías mecánicas desaparecidas; en otros libros de texto se habla de un ‘teorema trabajo-energía cinética’ generalizado aplicado a este problema [7]. Con esta interpretación de la Ec. (5), el problema de describir el choque inelástico del cubo contra el suelo estaría resuelto.

Sin embargo, hay ciertos problemas asociados a la anterior interpretación, puramente mecánica, de la Ec. (5). En primer lugar, la Ec. (5), expresada como $\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + Mg\Delta y_{\text{cm}} = \vec{N}\Delta y_{\text{cm}}$, no es una ecuación ‘trabajo-energía’ puesto que el **producto** $\vec{N}\Delta y_{\text{cm}}$ no es un trabajo [8]. La fuerza $\vec{N}$ *no tiene asociado desplazamiento*, por lo que no realiza ningún trabajo. Ejerce un impulso sobre el cubo, pero no realiza trabajo sobre el mismo. En segundo lugar, esta Ec. (5) *no es un balance de energías*, sino la integración de la correspondiente segunda ley de Newton. En la literatura en castellano, la Ec. (3) no tiene un nombre específico (no es el ‘teorema de las fuerzas vivas’) y se confunde a menudo [9] con una expresión generalizada del ‘teorema trabajo-energía’ (lo que no es). Y, en tercer lugar, a lo largo del proceso del choque inelástico aparecen ciertos *efectos térmicos* – el cubo aumenta su temperatura y, eventualmente, intercambia energía por calor con su entorno [10] –, efectos que no han sido explicados mediante las ecuaciones anteriores. Es decir, las energías mecánicas $\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$ y $Mg\Delta y_{\text{cm}}$ desaparecidas a lo largo del proceso no se han podido transformar (al menos, no completamente) en un trabajo (negativo) acumulado en alguna fuente de trabajo.

Puesto que a lo largo del proceso es evidente que se producen efectos térmicos, es necesario también utilizar el ‘primer principio de la termodinámica’

$$\Delta K_{\text{cm}} + \Delta U = W_{\text{ext}} + Q, \quad (6)$$

(ecuación de la energía y única hipótesis admisible para la generalización a un cuerpo extenso del teorema trabajo-energía, aplicable a un cuerpo puntual), para completar la descripción del proceso [11]. En la Ec. (6), ΔK_{cm} es la variación de la energía cinética del centro-de-masas del sistema (esta información ya se ha obtenido mediante las leyes de Newton), ΔU es la variación de la energía interna del sistema, que incluye, entre otros, $\Delta U = \Delta K_{\text{I}} + \Delta K_{\text{R}} + \Delta U_T + \Delta U_{\xi} + \dots$, donde ΔK_{I} es la variación de la energía cinética interna o relativa al centro-de-masas, ΔK_{R} es la variación de la energía cinética de rotación (esta información puede ser eventualmente obtenida mediante la ecuación de la rotación), ΔU_T **son** variaciones de energía interna debidas a variaciones de temperatura (y volumen), ΔU_{ξ} es la variación de energía interna debido a reacciones químicas, etc., donde $W_{\text{ext}} = \sum_k \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{y}_k$ es la suma de los trabajos infinitesimales realizados por las k fuerzas externas conservativas que sí realizan trabajo [W_{ext} no se debe confundir con el producto $\vec{F} \cdot \Delta \vec{y}_{\text{cm}}$ de la Ec. (3)], y donde Q es energía intercambiada por calor con un foco térmico.

Se va a considerar ahora la aplicación del primer principio de la termodinámica al proceso de choque inelástico descrito en la Fig. 1. El primer principio adopta entonces la

forma (la fuerza normal $\vec{N}$ no realiza trabajo)

$$\Delta K_{\text{cm}} + \Delta U = \vec{G} \cdot \Delta \vec{y}_G + Q. \quad (7)$$

En ausencia de otros efectos, la variación de la energía interna del cubo se puede poner como $\Delta U = Mc(T_f - T)$, donde T_f es la temperatura final del cubo (la temperatura inicial del cubo, T , es la de su entorno), y c su calor específico. Esta energía interna y Q en la Ec. (7) toman en consideración los efectos térmicos que se han producido en el choque inelástico. Se tiene entonces la ecuación del balance de energías

$$-\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + Mc(T_f - T) = Mg\Delta y_{\text{cm}} + Q \quad (8)$$

Para una contrastación experimental de esta ecuación se necesita, al menos, un termómetro [12], además de las reglas y los relojes citados anteriormente para describir el desplazamiento del centro-de-masas.

Las dos Ecs. (5) y (8) son ambas válidas y deben ser compatibles. Se obtiene entonces la ecuación de los efectos térmicos $Mc(T_f - T) = Q + \bar{N} \Delta y_{\text{cm}}$. Admitiendo que el cambio en temperatura del cubo es despreciable (si se espera algo de tiempo, su temperatura alcanza la del entorno), con $T_f \simeq T$, se concluye que hay una energía transferida por calor, $Q = -\bar{N} \Delta y_{\text{cm}}$, del cubo al foco térmico a temperatura T que la rodea, una energía positiva desde el punto de vista del foco térmico que la recibe. La variación de entropía del universo (el cubo no varía su entropía en esta descripción) viene dada en este caso como

$$\Delta S_{\text{U}} = \frac{\bar{N} \Delta y_{\text{cm}}}{T} > 0, \quad (9)$$

lo que confirma que el proceso es irreversible y que la energía mecánica disipada no puede recuperarse, siendo el ‘trabajo’ perdido W_{per} igual a $W_{\text{per}} = T \Delta S_{\text{U}}$ [13] (si la temperatura del cubo es diferente de la del entorno, se puede recuperar algo de energía mecánica utilizando máquinas térmicas). Para un cubo blando que se encuentre en reposo sobre el suelo, se podría pensar en una inyección de energía por parte del suelo, por ejemplo, a través de una fuerza $\vec{N}$, que hiciera que se elevara su centro-de-masas en $\Delta \vec{y}_{\text{cm}}$ y adquiriera una velocidad vertical v_{cm} . Este salto, proceso de producción de energía mecánica, opuesto al choque que se ha tratado aquí, estaría permitido por el primer principio de la termodinámica, pero implicaría una disminución de la entropía del universo, por lo que está prohibido por el segundo principio.

La segunda ley de Newton (vectorial), también en su forma integrada de la ‘ecuación (escalar) del centro-de-masas’, y el primer principio de la termodinámica (escalar), son hipótesis físicas independientes. Ambas ecuaciones proporcionan informaciones correctas y complementarias. Cuando se analizan procesos de disipación de energía mecánica en los que intervienen fuerzas que no realizan trabajo, estas fuerzas no-conservativas intervienen a la hora de calcular la resultante de todas las fuerzas y el impulso correspondiente que ejercen sobre el sistema, pero no intervienen en el cálculo de los trabajos realizados por las fuerzas conservativas externas que actúan sobre el sistema. La única generalización admisible a cuerpos extensos, deformables, macroscópicos, del teorema ‘trabajo-energía

cinética' aplicable a cuerpos puntuales, es el primer principio de la termodinámica, que, en presencia de fuerzas que no realizan trabajo, no debe confundirse con la ecuación del centro-de-masas [14]. Cuando en un proceso intervengan fuerzas que no realizan trabajo (una persona apoyada en la pared que se empuja y adquiere energía cinética, la fuerza de rozamiento aplicada al borde de un disco que gira, una persona que da un salto desde el suelo, la fuerza sobre el borde de un disco que desciende por un plano inclinado, etc.), se necesitarán, al menos, ambas ecuaciones para una explicación completa del proceso.

Referencias

- [1] P A Tipler, G Mosca, Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 1A. Mecánica, 6a Ed, Ed. Reverté, Barcelona, 2010. pp. 219-221. Conservación de la energía.
- [2] A B Arons, *Developing the energy concepts in introductory physics*, Phys. Teach. **27** 506-517 (1989)
- [3] B A Sherwood, *Pseudowork and real work*, Am. J. Phys. **51**, 597-602 (1983)
- [4] A J Mallinckrodt, H. S. Leff, *All about work*, Am. J. Phys. **60** 356-365 (1992)
- [5] H S Leff, A. J. Mallinckrodt, *Stopping objects with zero external work: Mechanics meets thermodynamics*, Am. J. Phys. **61**, 121-127 (1993)
- [6] H D Young, R E Freedman, *Sears-Zemansky. Física Universitaria Vol. 1* 12 Ed., Addison-Wesley, México 2009. p. 221
- [7] M Alonso, E J Finn, *Física. Volumen I. Mecánica*. Addison-Wesley Iberoamericana México 1986. p. 313
- [8] C M Penchina, *Pseudowork-energy principle*, Am. J. Phys. **46**, 295-296 (1978)
- [9] P A Tipler, G Mosca, *Física para la ciencia y la tecnología. Física moderna. Mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia*, Ed. Reverté, Barcelona, 2010. p. 222
- [10] P A Tipler, *Física* 3ra Ed. Ed. Reverté, Barcelona, 1995. p. 166
- [11] H Erlichson, *Internal energy in the First Law of thermodynamics*, Am. J. Phys. **52** 623-625 (1984)
- [12] J Koser, *Laboratory activity: specific heat by change in internal energy of silly putty*, Phys. Teach. **49** 574-575 (2011)
- [13] C Fernández Pineda, S Velasco Maillo, *Introducción a la Termodinámica*, Ed. Síntesis, Madrid 2009. p. 163.
- [14] J Güémez, M. Fiolhais, *From mechanics to thermodynamics: analysis of selected examples*, Eur. J. Phys. **34** 345-357 (2013)