

Notas de Clase.

El péndulo Matemático y Termodinámico

J. Güémez, R. Valiente y J. A. Mier

Departamento de Física Aplicada. Universidad de Cantabria

31 de octubre de 2025

Resumen

Se plantea y resuelve un problema de mecánica en el que se analiza un péndulo matemático con hilo metálico, cuyo período presenta una dependencia termodinámica implícita, además de las dependencias explícitas con la longitud del hilo y con la aceleración de la gravedad. Se pone de manifiesto cómo las variaciones de temperatura y altura sobre el nivel del mar influyen conjuntamente en el período de oscilación, ofreciendo un ejemplo sencillo pero físicamente significativo de la interrelación entre magnitudes mecánicas y termodinámicas. Asimismo, se enfatiza el uso del formalismo de las derivadas parciales como herramienta conceptual y operativa para resolver con sentido físico este tipo de problemas, mostrando su utilidad en la enseñanza de la física a nivel universitario.

1. Introducción

En numerosos sistemas mecánicos –como diferentes tipos de osciladores– aparecen magnitudes físicas (longitudes, constantes elásticas, períodos de oscilación, etc) que dependen de la temperatura o de condiciones ambientales tales como la altitud sobre el nivel del mar. Esta dependencia introduce una conexión directa entre los fenómenos mecánicos y los termodinámicos, permitiendo plantear una amplia gama de problemas que ilustran de manera clara la interrelación entre ambos campos.

El caso del péndulo simple constituye un ejemplo paradigmático y bien sencillo: aunque se trata de un sistema mecánico clásico, su período de oscilación depende implícitamente de la temperatura –a través de la dilatación térmica del hilo o varilla– y de la altitud –mediante la variación del campo gravitatorio–. Estas dependencias, que a menudo se consideran despreciables, adquieren relevancia cuando se busca una descripción precisa del sistema o se emplea el péndulo como instrumento de medida.

El estudio de este tipo de problemas, que conectan magnitudes propias de diferentes áreas de la física, resulta particularmente interesante por varias razones:

1. Permiten establecer vínculos entre dominios aparentemente disjuntos de la física, mostrando su carácter unificado.
2. Exigen trabajar en distintos niveles de descripción, combinando ecuaciones mecánicas, termodinámicas, electromagnéticas, etc.
3. El formalismo matemático de las derivadas parciales –de uso extendido en la termodinámica– resulta especialmente útil para abordar con rigor y sentido físico la resolución de problemas en los que intervienen varias variables interdependientes.

2. Caso práctico: El péndulo matemático y termodinámico

A continuación se expone un caso práctico que ilustra la relación entre magnitudes mecánicas y termodinámicas mediante el estudio de un péndulo matemático. Este sistema, aunque aparentemente simple, presenta una dependencia implícita de su período de oscilación tanto con la temperatura –a través de la dilatación térmica del hilo que modifica su longitud efectiva– como con la altitud –debido a la variación de la aceleración de la gravedad con la altura sobre el nivel del mar–. El problema permite analizar de forma integrada los efectos del entorno sobre las propiedades dinámicas del sistema, sirviendo además como ejemplo de aplicación del cálculo diferencial en la descripción de sistemas físicos dependientes de múltiples variables.

2.1. Enunciado

Un péndulo matemático, con hilo de cobre (Cu), está calibrado a temperatura de $\theta_I = 20^\circ\text{C}$, y al nivel del mar, tal que su altura sobre el nivel del mar es $h_I = 0$ m, para tener un período $T(\theta_I, h_I) = T(20, 0)$. Este péndulo se traslada

hasta la cima de una montaña de altura sobre el nivel del mar $h_f = 10^3$ m. ¿Qué variación de temperatura, $\Delta\theta$, debe experimentar el hilo de cobre del péndulo para que en la cima de la montaña su período de oscilación sea el mismo que tenía a nivel de mar, $T(20 + \Delta\theta, 10^3) = T(20, 0)$?

Datos. Coeficiente de dilatación lineal del cobre: $\alpha_{\text{cu}} = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Radio terrestre: $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m.

2.2. Resolución enfatizando los aspectos de la física

A la hora de resolver el problema propuesto, se establecerán en primer lugar las ecuaciones fundamentales que gobiernan las magnitudes involucradas. En particular, se emplean tres relaciones básicas: 1) la que determina el período del péndulo matemático, 2) la que describe la variación de la aceleración de la gravedad con la altitud y 3) la que expresa la dependencia de la longitud del hilo con la temperatura. Estas expresiones permiten analizar de forma conjunta cómo los efectos térmicos (asociados a la dilatación del material) y los efectos gravitatorios (debidos a la disminución de la gravedad terrestre con la altura) influyen sobre el período de oscilación. El tratamiento posterior enfatiza los aspectos físicos del problema, recurriendo a aproximaciones válidas en el régimen de variaciones pequeñas.

2.2.1. Periodo del péndulo

El período del péndulo matemático viene dado por la expresión:

$$T(L, g) = 2\pi \sqrt{\frac{L(\theta)}{g(h)}}, \quad (1)$$

donde $L = L(\theta)$ es la longitud del péndulo, que es función de la temperatura θ , y $g = g(h)$ es la aceleración de la gravedad, que depende de la altura h , sobre el nivel del mar.

2.2.2. Aceleración de la gravedad

La expresión para la aceleración de la gravedad $g(h)$ en función de la altura h sobre el nivel del mar viene dada por:

$$g(h) = \begin{cases} \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{h}{R_T}\right), & -1 \leq \frac{h}{R_T} \leq 0, \\ \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}, & \frac{h}{R_T} \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ es la constante de gravitación universal, $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ es la masa de la Tierra y $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ es el radio de la Tierra. La altura h sobre el nivel del mar toma valores positivos/negativos en los puntos externos/internos a la superficie terrestre, estando su dominio comprendido en el intervalo $h \in [-R_T, \infty)$. Para $0 \leq h \ll R_T$, la expresión de $g(h)$ puede aproximarse a:

$$g(h) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) = g(0) \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right), \quad (3)$$

siendo $g(0) \equiv GM_T/R_T^2$ el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($h = 0$). En la Fig. 1 se muestra la variación de g con la altura.

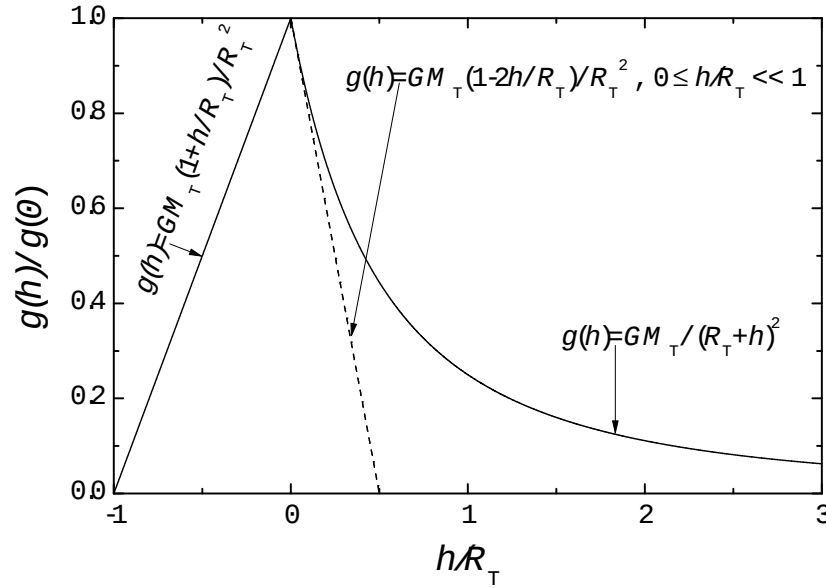


Figura 1: Campo gravitatorio terrestre normalizado en función de la altura normalizada respecto de la superficie terrestre. La línea continua representa el valor exacto, mientras que la línea discontinua representa la aproximación al valor exacto cuando $0 \leq h \ll R_T$.

2.2.3. Dilatación lineal

Considerando que el hilo del péndulo está fabricado con un material metálico, es imprescindible examinar cómo varía su longitud con la temperatura, dado que el período de oscilación depende de manera directa de dicha longitud. La

expansión térmica del material, caracterizada por el coeficiente de dilatación lineal α , introduce una corrección en la longitud efectiva del hilo que, aunque pequeña, puede resultar significativa en experimentos de alta precisión o en variaciones de temperatura apreciables. Esta dependencia térmica debe, por tanto, incluirse en el análisis completo del sistema para garantizar la consistencia del modelo. Así, un hilo metálico, de longitud $L_0 \equiv L(\theta_0)$, a temperatura θ_0 , con coeficiente de dilatación α constante, varía su longitud, bajo tensión constante, al variar la temperatura θ , como:

$$L(\theta) = L_0 \exp[\alpha(\theta - \theta_0)] \approx L_0[1 + \alpha(\theta - \theta_0)], \quad (4)$$

para $\alpha(\theta - \theta_0) \ll 1$.

2.2.4. Estimación inicial de la solución

Al aumentar la altura sobre la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad disminuye, de modo que $g(h) < g(0)$. En consecuencia, para mantener constante el período T del péndulo al ascender una montaña, la longitud del hilo debe reducirse. Si el hilo posee un coeficiente de dilatación lineal positivo, esta reducción de longitud sólo puede lograrse mediante una disminución de la temperatura, por lo que el incremento térmico debe ser negativo, $\Delta\theta < 0$.

A partir de las constantes características del problema, el coeficiente de dilatación lineal α_L y el radio terrestre R_T , puede definirse un coeficiente adimensional que relaciona la variación de temperatura con la variación de altura:

$$A = \frac{\Delta\theta}{\Delta h} \approx -\frac{1}{\alpha_L R_T}. \quad (5)$$

Este resultado permite una estimación preliminar del orden de magnitud de la variación térmica necesaria para compensar la disminución de la gravedad con la altura. Para una diferencia de altitud de $\Delta h = 10^3$ m, se obtiene:

$$\Delta\theta \approx -\frac{10^3}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^6} \approx -10^\circ\text{C}. \quad (6)$$

Por tanto, el hilo del péndulo debería experimentar un descenso aproximado de 10°C en su temperatura para mantener invariante el período de oscilación al ascender mil metros sobre el nivel del mar. Este resultado, aunque aproximado, permite una primera evaluación cuantitativa del equilibrio entre los efectos gravitatorios y térmicos que intervienen en el comportamiento del péndulo.

2.2.5. Derivada parcial asociada a la condición de período constante

El coeficiente que responde a la pregunta planteada, *¿cómo debe variar la temperatura θ para que, al cambiar la altura h , el péndulo mantenga invariable su período de oscilación T ?*, puede expresarse mediante una derivada parcial que relaciona ambos cambios. Desde un punto de vista matemático, esta relación se traduce en el coeficiente A , definido aproximadamente por:

$$A \approx \left. \frac{\Delta\theta}{\Delta h} \right|_T \equiv \left(\frac{\partial\theta}{\partial h} \right)_T, \text{ de modo que } d\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial h} \right)_T dh. \quad (7)$$

Este coeficiente describe la variación de temperatura necesaria para compensar la variación de la aceleración de la gravedad con la altura, garantizando que el período T permanezca constante. Su interpretación física puede desglosarse en tres elementos:

1. **Denominador:** El denominador de la derivada parcial representa la variación de la variable independiente, aquella que puede controlarse experimentalmente. En este problema, se trata de la altura h , cuya variación $\Delta h = h_f - h_I$ se sustituye diferencialmente por dh .
2. **Numerador:** El numerador corresponde a la variable dependiente, cuya variación se desea determinar. En este caso, es la temperatura θ , que varía en $\Delta\theta = \theta_f - \theta_I$, y que en forma diferencial se expresa como $d\theta$.
3. **Subíndice:** El subíndice del coeficiente indica la magnitud que permanece constante durante el proceso. Aquí, se mantiene fijo el período de oscilación T , lo que refleja la condición física impuesta en el problema: la invariancia del movimiento oscilatorio del péndulo pese a los cambios de temperatura y altura.

En conjunto, esta derivada parcial constituye la herramienta analítica que permite cuantificar la compensación térmica necesaria para contrarrestar el efecto gravitacional con la altitud, estableciendo así una conexión directa entre los aspectos térmicos y mecánicos del sistema.

2.2.6. Cálculo del coeficiente

Una vez identificado el coeficiente que responde a la condición de período constante, el siguiente paso consiste en determinar su valor aplicando las propiedades fundamentales de las derivadas parciales: (i) la *regla de la derivada inversa*, (ii) la *regla de la cadena*, y (iii) el *teorema de reciprocidad*. Estas herramientas

permiten expresar las variaciones entre magnitudes físicas interdependientes a partir de las ecuaciones que describen el proceso.

En el caso del péndulo matemático, el período de oscilación $T(L, g)$ depende explícitamente de dos variables: la longitud L del hilo y la aceleración de la gravedad g . Por tanto, el diferencial total de T puede escribirse como:

$$dT(L, g) = \left(\frac{\partial T}{\partial L} \right)_g dL + \left(\frac{\partial T}{\partial g} \right)_L dg. \quad (8)$$

Esta expresión refleja que un cambio en el período puede deberse tanto a una variación en la longitud del hilo como a una variación en la gravedad local. Para mantener T constante, ambas variaciones deben compensarse de modo que $dT = 0$, condición que será esencial en el cálculo posterior del coeficiente buscado.

Por otra parte, la longitud del hilo $L(\theta)$ depende de la temperatura θ del material, mientras que la aceleración de la gravedad $g(h)$ depende de la altura h sobre el nivel del mar (y en general, también de la latitud, dependencia que aquí no se considera). Por tanto, las variaciones diferenciales de estas magnitudes pueden expresarse como:

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_h d\theta, \quad (9)$$

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_\theta dh. \quad (10)$$

Estas relaciones vinculan explícitamente los cambios de temperatura y de altura con las magnitudes que afectan al período del péndulo. Al combinarlas con la ecuación diferencial del período, se obtiene una descripción completa del equilibrio entre los efectos térmicos y gravitacionales.

En consecuencia, el coeficiente buscado –que determina la variación de temperatura necesaria para compensar la disminución de la gravedad con la altura– puede derivarse a partir de estas expresiones, garantizando la condición de oscilación isoperiódica del péndulo.

A partir de las expresiones anteriores, puede analizarse cómo varía el período del péndulo $T(\theta, h)$ en función de las dos magnitudes que lo afectan directamente: la temperatura del hilo θ y la altura h sobre el nivel del mar. Considerando las dependencias funcionales $L(\theta)$ y $g(h)$, el diferencial total del período puede escribirse como:

$$dT(L, g) = \left(\frac{\partial T}{\partial L} \right)_g \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_h d\theta + \left(\frac{\partial T}{\partial g} \right)_L \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_\theta dh, \quad (11)$$

lo que equivale a expresar el diferencial del período directamente en función de θ y h :

$$dT(\theta, h) = \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_h d\theta + \left(\frac{\partial T}{\partial h} \right)_\theta dh. \quad (12)$$

Las relaciones anteriores se conectan mediante la *regla de la cadena*, que permite expresar las derivadas parciales de T con respecto a θ y h en términos de las derivadas de sus variables intermedias L y g . Así se obtiene:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_g = \left(\frac{\partial T}{\partial L} \right)_g \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_g, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h} \right)_L = \left(\frac{\partial T}{\partial g} \right)_L \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_L. \quad (14)$$

Estas expresiones ilustran el papel mediador de la longitud y de la gravedad en la relación entre la temperatura, la altura y el período del péndulo. En total, deben evaluarse cuatro coeficientes parciales distintos, los cuales intervienen en la relación final entre θ y h bajo la condición de que el período T permanezca constante. Imponiendo la condición $dT = 0$ (es decir, $T = \text{cte}$) en la Ec. (12) y sustituyendo los coeficientes dados por las Ecs. (13)-(14), se obtiene finalmente:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial h} \right)_T = - \frac{(\partial T / \partial g)_\theta (\partial g / \partial h)_\theta}{(\partial T / \partial L)_h (\partial L / \partial \theta)_h}. \quad (15)$$

Esta expresión constituye una *derivada parcial compuesta*, que combina las sensibilidades del período respecto a la longitud, la gravedad, la temperatura y la altura. Físicamente, el resultado cuantifica la *variación térmica necesaria* para compensar el cambio en la gravedad con la altitud, asegurando que el péndulo conserve su mismo período de oscilación. De este modo, el formalismo de derivadas parciales permite establecer una conexión precisa entre los efectos térmicos y gravitacionales que intervienen en el comportamiento del sistema. A partir de la expresión general del período del péndulo matemático dada por la Ec. (1), es posible calcular dos de los coeficientes parciales que intervienen en la Ec. (15).

1. Dependencia del período con la gravedad ($\theta = \text{cte}$): Teniendo en cuenta que $\theta = \text{cte}$ implica que $L = \text{cte}$, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial g} \right)_\theta \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial g} \right)_L = 2\pi L^{1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) g^{-3/2} = -\frac{1}{2} \frac{T}{g}. \quad (16)$$

A la vista de la Ec. (8), al disminuir la aceleración de la gravedad ($dg < 0$), manteniendo la longitud constante, ($dL = 0$), el período de oscilación del péndulo T aumenta (tarda más tiempo en completar una oscilación).

2. Dependencia del período con la longitud ($h = \text{cte}$): Teniendo en cuenta que $h = \text{cte}$ implica que $g = \text{cte}$, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_h \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_g = 2\pi g^{-1/2} \frac{1}{2} L^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{T}{L}. \quad (17)$$

A la vista de la Ec. (8), al aumentar la longitud ($dL > 0$) del péndulo, manteniendo la gravedad constante, ($dg = 0$), el período de oscilación T aumenta. Por tanto, para compensar la disminución de g con la altura, la longitud del hilo debe contraerse.

3. Dependencia de la longitud con la temperatura ($h = \text{cte}$): Si el hilo es metálico (por ejemplo, de cobre), a partir de la Ec. (4) es posible calcular la variación de la longitud del péndulo con la temperatura cuando $h = \text{cte}$:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_h \approx \alpha_{\text{cu}} L(\theta_0), \quad (18)$$

donde α_{cu} es el coeficiente de dilatación lineal del cobre. Al aumentar la temperatura ($d\theta > 0$), el hilo se dilata, aumentando su longitud y el período.

4. Dependencia de la gravedad con la altura ($\theta = \text{cte}$): Para $0 \leq h \ll R_T$, a la vista de la Ec. (3), la variación de la gravedad con la altura cuando $\theta = \text{cte}$ se puede aproximar como sigue:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_\theta \approx -\frac{2GM_T}{R_T^3} = -\frac{2g(0)}{R_T}. \quad (19)$$

Al ascender ($dh > 0$), la gravedad disminuye y el período aumenta. Sustituyendo las Ecs. (16)-(17)-(18)-(19) en la Ec. (15), se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial h}\right)_T = -\frac{(-T/2g)(-2g(0)/R_T)}{(T/2L)(\alpha_{\text{cu}}L_0)} \approx -\frac{2}{\alpha_{\text{cu}}R_T}. \quad (20)$$

Este resultado muestra que la variación de temperatura necesaria para compensar la disminución de la gravedad debido a un incremento de la altura, no depende la longitud del péndulo, sino de las propiedades elásticas del hilo metálico (α_{cu}) y del radio de la Tierra (R_T).

2.2.7. Solución del problema

Ciñéndonos al enunciado del problema, para un incremento de altura $\Delta h = 10^3$ m:

$$\Delta \theta \approx -\frac{2}{\alpha_{\text{cu}}R_T} \Delta h \rightarrow \Delta \theta \approx -\frac{2}{17 \cdot 10^{-6} \cdot 6.37 \cdot 10^6} 10^3 = -18.5^\circ \text{C}. \quad (21)$$

En general, para $0 \leq h \ll R_T$ se tiene:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_I \approx -\frac{2}{\alpha_{\text{cu}}R_T}(h_f - h_I) = -\frac{2}{\alpha_{\text{cu}}R_T}\Delta h, \quad (22)$$

donde θ_f es la temperatura a la que debe estar el hilo de cobre si se quiere que a una altura h_f el período de oscilación del péndulo sea el mismo que a temperatura ambiente θ_I y altura h_I . La Ec. (22) representa la condición de equilibrio térmico-gravitacional para mantener constante el período del péndulo. Se obtiene una variación negativa de la temperatura, como se había estimado en base a la Ec. (6).

2.3. Resolución alternativa I: enfoque algorítmico aproximado

El problema puede abordarse también mediante un procedimiento alternativo, de carácter más *algorítmico*, en contraste con el enfoque anterior, más *físico y analítico*. Este método resulta útil si no se tiene la destreza adecuada manejando derivadas parciales y sus propiedades. Pero se complica la resolución si no se dispone de calculadora o no se tiene el manejo suficiente con los desarrollos en serie de Taylor de las funciones matemáticas más habituales.

Para que el péndulo conserve el mismo período de oscilación al pasar del nivel del mar a una cierta altura sobre él, $T(20 + \Delta\theta, 10^3) = T(20, 0)$, debe cumplirse que el cociente L/g permanezca invariable. Por tanto:

$$\frac{L_0}{g(0)} = \frac{L_0(1 + \alpha_{\text{cu}}\Delta\theta)}{GM_T/(R_T + h)^2}. \quad (23)$$

El término de la izquierda representa la situación inicial (nivel del mar, $\theta_I = 20^\circ\text{C}$), mientras que el de la derecha corresponde a la situación final (altura $h_f = 10^3$ m, temperatura modificada $\theta_f = \theta_I + \Delta\theta$). A partir de esta relación, y desarrollando a primer orden en $h/R_T \ll 1$, se obtiene:

$$\frac{L_0(1 + \alpha_{\text{cu}}\Delta\theta)}{GM_T/(R_T + h)^2} \approx \frac{L_0}{g(0)} \frac{[1 + \alpha_{\text{cu}}(\theta_f - \theta_I)]}{(1 - 2h/R_T)}. \quad (24)$$

De esta igualdad se deduce que el factor térmico y el gravitacional deben compensarse mutuamente, de modo que:

$$\frac{1 + \alpha_{\text{cu}}(\theta_f - \theta_I)}{1 - 2h/R_T} = 1, \quad (25)$$

Despejando $\Delta\theta$, se obtiene:

$$1 + \alpha_{\text{cu}}\Delta\theta = 1 - \frac{2h}{R_T} \longrightarrow \Delta\theta = -\frac{2}{\alpha_{\text{cu}}R_T}h. \quad (26)$$

Por tanto, la temperatura del hilo debe disminuir linealmente con la altura, exactamente en la misma proporción obtenida mediante el método anterior, como se mostraba en la Ec. (22).

Esta resolución alternativa conduce al mismo resultado que el análisis basado en derivadas parciales, pero a través de un razonamiento más directo y algorítmico. Ambas aproximaciones son complementarias: la primera resalta los *aspectos físicos* y el papel de las *relaciones termodinámicas*, mientras que la segunda está basada en la resolución *matemática*.

2.4. Resolución alternativa II: enfoque algorítmico exacto

Finalmente, puede plantearse una tercera forma de resolver el problema, aún más directa y rigurosa desde el punto de vista algebraico. En este caso, se impone *exactamente* la igualdad entre los periodos del péndulo en las dos situaciones comparadas —a nivel del mar y a cierta altura—, sin recurrir a desarrollos aproximados ni a la linealización de las expresiones. La condición fundamental es, por tanto:

$$\frac{L_0}{g(0)} = \frac{L_0 \exp[\alpha_{\text{cu}}(\theta_f - \theta_I)]}{GM_T/(R_T + h)^2}. \quad (27)$$

A partir de esta relación, puede obtenerse el valor de $\Delta\theta = \theta_f - \theta_I$ sustituyendo los valores numéricos de las constantes y operando directamente con una calculadora. Este procedimiento, aunque formalmente más sencillo, *encierra ciertos riesgos didácticos*: la sustitución numérica sin un análisis previo de las dependencias funcionales puede conducir a errores conceptuales o de signo. De hecho, se ha observado que aproximadamente un 10 % de los estudiantes opta por este método en primera instancia, y de ellos, alrededor del 50 % obtiene un resultado incorrecto, ya sea en magnitud o en signo.

Despejando $\Delta\theta$ de la Ec. (27), se obtiene:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_I = \frac{1}{\alpha_{\text{cu}}} \ln \left(\left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 \right) = -18.5^\circ\text{C}. \quad (28)$$

Esta expresión es diferente a la obtenida según el enfoque algorítmico aproximado según se expresa en la Ec. (26). Siendo un enfoque matemáticamente exacto, pedagógicamente es menos recomendable si no se acompaña de

una reflexión física adecuada. Su comparación con los métodos anteriores – especialmente con el tratamiento mediante derivadas parciales– resulta muy instructiva, ya que pone de relieve la importancia de comprender las ecuaciones no solo como herramientas de cálculo, sino también como expresiones de relaciones físicas coherentes. Finalmente, utilizar este enfoque resulta peligroso a la hora de obtener el resultado numérico con una calculadora debido a errores de redondeo en el argumento del logaritmo en la Ec. (28).

2.5. Variantes del problema

Este problema admite variantes de interés tanto físico como didáctico. Las más naturales son dos:

1. Que el péndulo no ascienda una montaña, sino que descienda por debajo del nivel del mar, por ejemplo, hacia una depresión geográfica o un pozo profundo.
2. Que, en lugar de un hilo metálico con coeficiente de dilatación positivo, se utilice un material con coeficiente negativo, como ciertos cauchos o polímeros, cuyo comportamiento térmico es inverso al habitual.

2.5.1. Péndulo matemático situado por debajo del nivel del mar

Consideremos un péndulo matemático con hilo de cobre (Cu), calibrado a una temperatura de referencia $\theta_i = 20\text{ }^\circ\text{C}$ y situado inicialmente a nivel del mar ($h_i = 0$), con un período de oscilación $T(20, 0)$. El péndulo se traslada ahora a la orilla del Mar de la Sal (Mar Muerto), a una profundidad de aproximadamente $h_f \approx -400\text{ m}$, bajo el nivel del mar.

Pregunta: ¿Qué variación de temperatura, $\Delta\theta$, debe experimentar el hilo de cobre para que su período en el Mar de la Sal sea el mismo que tenía a nivel del mar, $T(20 + \Delta\theta, -400) = T(20, 0)$?

La aceleración de la gravedad $g(h)$ en función de la profundidad ($h < 0$) puede deducirse del teorema de Gauss para una esfera de densidad uniforme, como se indica en la Ec. (2). En este caso, la derivada de la gravedad se puede escribir de forma exacta:

$$\frac{dg(h)}{dh} = \frac{GM_T}{R_T^3} = \frac{g(0)}{R_T}. \quad (29)$$

Esto indica que la gravedad disminuye con la profundidad (es decir, a medida que $|h|$ aumenta, con $h < 0$), de manera análoga al caso de la altura, pero con signo opuesto, como se comprueba en la Fig. 1. En consecuencia, para mantener

constante el período T del péndulo a medida que aumenta la profundidad, deberá ajustarse su longitud y por tanto su temperatura, en base al mismo procedimiento visto anteriormente.

2.5.2. Péndulo matemático de hilo de caucho

Consideremos un péndulo matemático con hilo de caucho con coeficiente de dilatación lineal negativo $\alpha_{\text{ch}} = -3.0 \cdot 10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Este péndulo se lleva a una altura de $h = 10^3 \text{ m}$ sobre el nivel del mar. ¿En cuánto debe variar su temperatura para que tenga el mismo período que a nivel del mar?

3. Conclusiones

El estudio del péndulo matemático con hilo metálico constituye un ejemplo apropiado para ilustrar la conexión directa entre fenómenos mecánicos y termodinámicos. En este artículo se analiza la dependencia implícita del período de oscilación del péndulo con la temperatura (debido a la dilatación térmica del hilo) y con la altitud, a través de la variación del campo gravitatorio.

Para resolver esta interrelación de variables se hace uso del formalismo matemático de las derivadas parciales, de uso extendido en termodinámica, y que se adapta particularmente bien a situaciones en las que interesa más relacionar variaciones de magnitudes que su propio valor.

En el problema planteado, se impone la constancia de una magnitud física (el período de oscilación del péndulo, $T = \text{cte}$), que se traduce analíticamente en un coeficiente de derivada parcial, $(\partial\theta/\partial h)_T$, que cuantifica la variación térmica ($\Delta\theta$) necesaria para contrarrestar el efecto gravitatorio (inducido por la variación de altitud Δh) sobre dicho período de oscilación. Se muestra cómo esta forma de trabajar prioriza la reflexión física.

Este enfoque se complementa con dos métodos alternativos (uno aproximado y otro exacto), más algorítmicos, con los que se llega al mismo resultado, siendo útiles para los que tengan menos destreza en el manejo de las derivadas parciales.

Finalmente, se plantean variantes del problema que pudieran ser de interés, tanto físico como didáctico.